

УДК 519.6:532:533

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЖИМАЕМЫХ СРЕД НА ЭЙЛЕРОВЫХ СЕТКАХ

*А.А. Аганин, Т.С. Гусева*

### Аннотация

Представлен краткий обзор работ по численному моделированию задач контактного взаимодействия сжимаемых сред с большой разницей акустических импедансов при сильных деформациях контактной границы и при наличии в средах ударных волн. Приведены основные положения реализованной авторами методики расчета таких задач на основе метода CIP-CUP (Constrained Interpolation Profile Combined Unified Procedure), в котором применяются эйлеровы сетки без явного выделения контактных границ, а исходные уравнения движения сжимаемой жидкости записываются в терминах неконсервативных переменных. Представлены результаты расчетов тестовых задач, имеющих аналитическое решение, подтверждающие работоспособность созданного алгоритма. Возможности методики проиллюстрированы на задачах об ударе осесимметричной высокоскоростной струи жидкости по жесткой стенке и по тонкому слою жидкости на жесткой стенке. Результаты расчетов удовлетворительно согласуются с известными численными решениями, полученными методом адаптивно-подвижных сеток с явным выделением межфазной границы.

**Ключевые слова:** течения многофазных сред, большие деформации межфазной границы, эйлерова сетка, «улавливание» контактной границы, метод CIP-CUP.

---

### Введение

Многие важные с практической точки зрения явления характеризуются одновременным наличием сильных ударных волн и контактных границ, которые претерпевают большие перемещения, деформации, нарушения топологии. Примеры таких явлений – подводные взрывы вблизи свободной поверхности, взаимодействие струй, капель, пузырьков с ударными волнами, твердыми стенками, границами раздела жидкостей. Для описания подобных явлений необходимо, как правило, применять уравнения динамики сплошных сред с учетом эффектов вязкости, теплопроводности и дополнять их сложными уравнениями состояния. Решение задач при таком подходе приходится находить численно. Обзоры большого количества используемых в настоящее время методов численного решения задач динамики сплошных сред при наличии в них сильных ударных волн, разнообразных контактных границ можно найти в [1–11]. Имеющиеся численные методы принято условно разбивать на лагранжевы, произвольные эйлерово-лагранжевы и эйлеровы.

В лагранжевых методах ячейки расчетной сетки являются частицами среды. При этом контактные границы всегда совпадают с координатными поверхностями и естественным образом деформируются в соответствии с деформацией частиц, так что никаких специальных процедур для описания движения контактных границ не требуется. Поэтому для задач с изменяющимися контактными границами лагранжевы методы являются наиболее эффективными. Аппроксимационные соотношения лагранжевых методов относительно просты, поскольку в лагранжевой форме уравнений динамики сплошных сред отсутствуют конвективные слагаемые.

Однако в силу недивергентного характера лагранжевой формы уравнений динамики сплошных сред лагранжевы методы неконсервативны. Это означает, что при исследовании задач с интенсивными ударными волнами нужно вводить искусственную вязкость [12, 13]. Кроме того, при сильных деформациях частиц среды, например, в потоках с формирующейся завихренностью, лагранжева сетка сильно искажается, что приводит к потере точности и росту погрешностей. В таких случаях приходится проводить редискретизацию изучаемых сред, другими словами, перестройку расчетной сетки, и выполнять интерполяцию параметров ячеек со старой сетки на новую. При этом преимущества лагранжевых методов сохраняются, но только до тех пор, пока процедуры перестройки сеток и интерполяции относительно просты и выполняются нечасто.

Проблемы потери точности расчетов, обусловленные деформацией вычислительных сеток, значительно уменьшаются при использовании произвольных лагранжево-эйлеровых (ALE, Arbitrary Lagrangian-Eulerian) методов (или методов подвижных сеток). В этих методах существенные границы задачи (ударные волны, контактные границы, свободные поверхности, жесткие стенки и т. д.) всегда совпадают с координатными поверхностями (или их частями). При этом нормальные составляющие скорости перемещения узлов расчетной сетки, расположенных на границе, совпадают со скоростью самой границы, а в касательном направлении эти узлы могут перемещаться произвольным образом. Перемещение остальных узлов сетки, не совпадающих с границей, может быть произвольным во всех направлениях, независимо от движения частиц среды. Эту свободу можно использовать для повышения экономичности расчетов. Так, можно строить адаптивные сетки со сгущением в областях с большими градиентами решения и разрежением в областях с гладким поведением решения, сетки с плавным изменением характерных размеров соседних ячеек, сетки с сохранением четырехугольных ячеек, близких к квадратным или прямоугольным и т. д. При этом необходимо вводить в математическую постановку задачи дополнительные уравнения движения узлов сетки. Исходные уравнения в произвольных лагранжево-эйлеровых методах можно представить как в недивергентной, так и в дивергентной формах. Поэтому расчет интенсивных ударных волн в рамках этих методов можно проводить без введения искусственной вязкости, воспользовавшись для этого консервативными схемами. Если лагранжевы методы считаются оптимальными в задачах с относительно малыми деформациями самих сред, то произвольные лагранжево-эйлеровы методы оптимальны при относительно небольших деформациях существенных границ задачи, под которые подстраиваются используемые в этих методах расчетные сетки. Однако если существенные границы сильно деформируются, возникают, исчезают или меняют свою связность, то при использовании произвольных лагранжево-эйлеровых методов также приходится выполнять перестройку сетки и проводить соответствующую интерполяцию численного решения на новую сетку (иногда с выполнением законов сохранения массы, импульса, полной энергии). Естественно, что все это усложняет алгоритмы расчета и снижает их экономичность пропорционально частоте применения процедур перестройки сетки и интерполяции решения.

В эйлеровых методах используются стационарные (декартовы или криволинейные) сетки. При их использовании не возникает проблем, связанных с перестройкой сеток и интерполяцией численного решения с сетки на сетку. Как и схемы произвольных лагранжево-эйлеровых методов, эйлеровы схемы могут быть как консервативными, так и неконсервативными, что зависит от исходной математической формулировки задачи (она может быть как дивергентной, так и недивергентной) и способа ее аппроксимации. Для расчета задач с сильными ударными волнами широко применяются консервативные методы без явного выделения газодинамических разрывов, в которых не нужно использовать искусственную вязкость.

Наиболее популярными среди них является метод Годунова [14] и его модификации повышенного порядка точности (повышение точности достигается за счет применения эффективных ограничителей производных).

Существующие методы описания перемещения контактной границы по эйлеровой сетке можно условно подразделить на две большие группы. Первую группу составляют методы, в которых подвижные контактные границы выделяются явно как совокупность поверхностных ячеек или узлов [10, 15–20]. В англоязычной литературе они называются FT-методами (front-tracking methods), а в терминологии работы [4] – методами дискретных лагранжевых маркеров. Перемещение контактной границы (изменение позиции идентифицирующих ее маркеров) осуществляется явно путем решения уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u},$$

где  $\mathbf{u}$  – скорость элемента контактной границы,  $\mathbf{x}$  – его радиус-вектор,  $t$  – время. Поверхностная лагранжева сетка маркеров контактной границы, размерность которой на единицу меньше пространственной размерности рассматриваемой задачи, движется по эйлеровой сетке. Определять параметры сред на межфазной границе (жидкость – газ) в случае ее явного выделения можно, например, решая задачу Римана о распаде произвольного разрыва с единым уравнением состояния для обеих сред – двучленным уравнением [14] или универсальным уравнением “stiffened gas” [21]. В целом, FT-методы характеризуются относительно высокой эффективностью расчета движения контактных границ, но при изменении топологии границ или при обобщении на многомерный случай алгоритмы значительно усложняются.

Во второй группе методов расчета контактных границ на эйлеровой сетке подвижные контактные границы улавливаются неявно посредством пространственной функции  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  ( $\mathbf{x}$  – радиус-вектор точки пространства), идентифицирующей контактирующие среды. В англоязычной литературе такие методы называются FC-методами (front-capturing methods), а в терминологии работы [4] – методами непрерывных лагранжевых маркеров. Функция-идентификатор  $\varphi$  рассчитывается наряду с остальными характеристиками сред. Основная идея применения функции-идентификатора заключается в том, что ее значения сохраняются вдоль лагранжевых траекторий частиц среды. Изменение функции  $\varphi$  подчиняется уравнению переноса

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi = 0,$$

где  $\mathbf{u}$  – локальная скорость среды.

Существующие FC-методы различаются способом задания и физическим смыслом функции-идентификатора. Описание ряда широко распространенных вариантов FC-методов можно найти в [3, 22]. К ним, в частности, относятся методы Volume Of Fluid (VOF) и Level Set (LS). В методе VOF функция-идентификатор  $\varphi$  имеет смысл объемной доли данной среды в ячейке – фракционного объема. При этом каждая из контактирующих сред характеризуется своей функцией-идентификатором, которая имеет значение 1 в ячейках, полностью занятых соответствующей средой, 0 – в ячейках, где эта среда отсутствует, и промежуточное значение между 0 и 1 в ячейках с контактной границей. Изначально метод был предложен для несжимаемых и слабосжимаемых жидкостей [23]. Сейчас существуют модификации этого метода для задач с полным учетом сжимаемости [24, 25]. В рамках этого метода для повышения точности определения положения контактной границы внутри ячейки либо применяются специальные алгоритмы реконструкции границы на каждом временном шаге на основе рассчитанной функции-идентификатора  $\varphi$  [26, 27], либо используются схемы с минимальной численной диффузией для уравнения переноса относительно функции  $\varphi$  [28, 29]. Алгоритмы

метода VOF усложняются при изменении топологии границы и при обобщении на многомерный случай. В методе LS функция-идентификатор имеет смысл знакопеременного расстояния до контактной границы (знак функции идентифицирует среды по разные стороны от границы контакта) [30, 31]. При численном решении уравнения переноса функция  $\varphi$  может терять свойства расстояния, поэтому в рамках метода LS приходится применять специальные процедуры ее реинициализации.

Методы расчета течений с контактными границами подразделяют также на два класса в зависимости от того, как трактуется в них контактная граница. К первому классу относят методы, в которых контактная граница рассматривается как четкая поверхность (линия), по разные стороны которой находятся разные среды. В англоязычной литературе такие методы называются *sharp interface methods* (SIM). Второй класс составляют методы, в которых контактная граница представляется не как четкая поверхность, а как тонкий переходный слой, в котором характеристики среды (некой смеси контактирующих сред) плавно переходят от параметров одной среды к параметрам другой. В англоязычной литературе такие методы называются *diffusive interface methods* (DIM). К методам класса SIM относятся все FT-методы и ряд FC-методов. Так, усилия, прилагаемые в FC-методах VOF и LS для того, чтобы функция-идентификатор  $\varphi$  сохраняла заявленный физический смысл (объемной доли жидкости в ячейке для VOF и знакопеременного расстояния до контактной границы для LS), нужны для установления как можно более точного положения четкой границы между несмешивающимися средами. В силу этого методы VOF и LS относятся к классу SIM. В FC-методах класса DIM, как и в методе VOF, функция-идентификатор  $\varphi$  (называемая также “indicating function”, “color function”, “density function” или, по аналогии с VOF, “fractional volume”) в областях, занятых разными средами, принимает различающиеся постоянные значения. В начальный момент времени она имеет ступенчатый профиль на границе контакта. В ходе расчетов вследствие численной диффузии этот профиль постепенно размывается. При этом точное положение контактной границы становится неопределенным, как и в технологиях расчета ударных волн без их явного выделения. В случае необходимости граница контакта идентифицируется либо как область больших градиентов функции-идентификатора, либо как изоповерхность ее среднего значения. Таким образом, хотя контактная граница между несмешивающимися жидкостями является в реальности четкой, в рамках методов класса DIM она заменяется на тонкую переходную область, занятую смесью, сформированной контактирующими средами. С измельчением сетки переходная область превращается в разрыв. Для переходной области должны быть определены соответствующие переходные значения параметров уравнения состояния или само переходное уравнение состояния для “смеси”. При этом функция-идентификатор может интерпретироваться как эффективный показатель адиабаты [32, 33], некая функция от показателя адиабаты [34], эффективная постоянная двучленного уравнения состояния (например, модели “stiffened gas”) [7, 8], массовая [35–38] или объемная [3, 39–45] доля среды в “смеси”.

Методы DIM с размыванием контактной границы являются с точки зрения описания ее положения наименее точными, но в то же время они гораздо более просты в применении. Они легко обобщаются на многомерный случай и без дополнительных сложностей позволяют определять положение контактирующих сред в случае переменной топологии занимаемых ими подобластей. Достоинством этих методов является еще и то, что обусловленная численной диффузией ширина переходной области в них может быть ограничена при использовании определенных методик [11, 43, 46–48].

В последнее время появилось много гибридных методов (см. ссылки в [9]), в той или иной мере объединяющих достоинства сочетаемых в них подходов: смешанные алгоритмы LS-VOF, particle-LS, marker-VOF, LS-FT и т. д.

Таким образом, основное преимущество DIM-методов с размытием контактных границ перед методами SIM с явным выделением контактных границ – это относительная простота алгоритмов описания границ сложной топологии, включая фрагментацию, коалесценцию, возникновение и исчезновение поверхностей. В силу этого DIM-методы выглядят весьма привлекательными. Однако их использование для расчета контактного взаимодействия сжимаемых сред в сочетании с консервативными эйлеровыми схемами, основанными на сквозном расчете разрывов, оказалось проблематичным [32]. Дело в том, что консервативные эйлеровы методы сквозного счета всегда сопровождаются численной диффузией разрывов на несколько расчетных узлов. Эта диффузия, весьма желательная при расчете ударных волн в однородных средах, вызывает проблемы в случае расчета течений с контактными границами. Так, численная диффузия приводит к размытию профиля плотности на контактной границе. В результате возникает переходная зона с неопределенной средой, давление которой уже нельзя выражать через консервативные переменные (массу, импульс и полную энергию), применяя для этого одно из уравнений состояния контактирующих сред или какое-либо уравнение состояния “смеси”, поскольку это приводит к возникновению нефизичных осцилляций давления. Эти осцилляции не связаны с порядком точности схемы, поскольку наблюдаются даже при использовании схем первого порядка точности [22]. Нужно отметить, что FT-методы не имеют такого недостатка, поскольку контактная граница в них выделяется явно без какого-либо размытия.

Избежать нефизичных осцилляций давления в рамках DIM-подхода можно, воспользовавшись неконсервативными схемами сквозного счета, основанными на применении уравнения эволюции давления [32, 49, 50]. Можно использовать и консервативные схемы, но с локальной неконсервативной коррекцией полной энергии в окрестности контактной границы также на основе уравнения эволюции давления [3, 22, 51].

С другой стороны, в методах класса SIM с четким определением контактной границы применение консервативных эйлеровых схем сквозного счета, например схемы Годунова, также сопровождается некоторыми трудностями. При движении контактной границы по эйлеровой сетке возникают дробные ячейки (cut cells). Они имеют нерегулярную форму, так что для их обработки требуются специальные процедуры, точность которых обычно ниже точности алгоритмов расчета регулярных ячеек [1, 52]. Кроме того, размеры дробных ячеек могут быть очень малыми, что приводит к жестким ограничениям на шаг по времени.

Избежать проблем с дробными ячейками в рамках SIM-подхода позволяет идеология фиктивной жидкости GFM (Ghost Fluid Method) [53]. Согласно этой идеологии поверх ячеек с реальной средой на “другой стороне” контактной границы вводится слой фиктивных ячеек, заполненных фиктивной жидкостью, термодинамически подобной жидкости “с этой стороны”. После независимого расчета каждой из “однородных” сред (реальная среда с одной стороны контактной границы – термодинамически эквивалентная ей фиктивная среда по другую сторону границы) в зависимости от положения границы контакта в узлах сохраняется только решение, соответствующее реальной среде. Для доопределения фиктивных ячеек, входящих в шаблон схемы расчета ячейки с контактной границей, и для модификации потоков на гранях такой ячейки используется решение задачи Римана о распаде разрыва на самой контактной границе. В случае контакта сред с большой разницей акустических импедансов, то есть контакта сред типа газ – жидкость с сильно различающимися уравнениями состояния, метод фиктивной жидкости GFM потребовал ряд модификаций [54–56].

В классе SIM-методов можно отметить метод I-SIM [57], в котором движение контактной границы и динамика контактирующих сред являются полностью

(нелинейно) связанными, что исключает возникновение погрешностей, обусловленных операторным расщеплением. Кроме того, метод I-SIM является универсальным в том смысле, что он пригоден для расчета как сжимаемых, так и несжимаемых течений.

Прорыв в разработке подобных методов, которые можно применять для расчета контактного взаимодействия сред при произвольных скоростях их движения с учетом и без учета сжимаемости, был связан с появлением метода CIP-CUP (Constraint Interpolation Profile Combined and Unified Procedure) [49]. Этот метод основан на расщеплении уравнений Эйлера в переменных плотность, скорость, давление на конвективную и неконвективную части. Для расчета конвективной части применяется метод CIP – один из вариантов полулагранжевых методов, характеризующийся монотонностью и малой диффузией. Для расчета неконвективной части используется идеология методов расчета течений несжимаемых сред на основе уравнения для давления, обобщенная на случай сжимаемости. Данная процедура может применяться для расчета течений с широким диапазоном проявления сжимаемости и с контактными границами со значительным перепадом акустического импеданса. Несмотря на то что метод CIP-CUP не является консервативным, в сочетании с искусственной вязкостью [58] он демонстрирует хорошие возможности при расчете многофазных течений с ударными волнами. Поэтому сам метод CIP-CUP и его модификации широко применяются многими исследователями [43–45, 59–64]. Метод, идеологически эквивалентный методу [49], используется в работе [5] в качестве предобуславливателя для консервативной схемы с целью обеспечения корректности решения на контактной границе.

В настоящей работе реализована методика расчета задач контактного взаимодействия сжимаемых сред, основанная на DIM-подходе с неявным улавливанием межфазных границ на эйлеровой сетке и уравнениях динамики сред в неконсервативной форме с применением для их решения метода CIP-CUP [43]. Такой подход сочетает в себе относительную алгоритмическую простоту, универсальность и эффективность при расчете взаимодействия сжимаемых и несжимаемых сред с сильными деформациями контактных границ.

### 1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассматривается контактное взаимодействие жидкости и газа – сред, сильно различающихся между собой термодинамически и по проявлению эффекта сжимаемости. При этом допускаются конечные деформации контактной границы и наличие сильных ударных волн в жидкости и газе. Примерами таких задач являются схлопывание газовой полости в жидкости при прохождении в ней интенсивной ударной волны, сильное несферическое сжатие кавитационного пузырька вблизи тела с образованием на поверхности пузырька кумулятивной струйки, высокоскоростной удар движущейся в газе капли жидкости о жесткую стенку и т. д.

Уравнения динамики взаимодействующих сред без учета эффектов вязкости и теплопроводности записываются относительно плотности  $\varrho$ , скорости  $\mathbf{u}$  и давления  $p$  в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varrho &= -\varrho \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\frac{\nabla p}{\varrho}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p &= -\varrho C_S^2 \nabla \cdot \mathbf{u},\end{aligned}\tag{1}$$

где  $C_S$  – скорость звука, определяемая общим для обеих сред выражением

$$C_S = \sqrt{\frac{\gamma(p+B)}{\varrho}}.$$

Для жидкости входящие в это выражение постоянные  $\gamma$  и  $B$  являются константами уравнения состояния Тэта, а для газа  $B = 0$ ,  $\gamma$  – показатель адиабаты.

В расчетах скорость звука вычисляется по формуле

$$C_S = \varphi C_{S,l} + (1 - \varphi) C_{S,g},$$

где  $C_{S,l}$  – скорость звука в жидкости,  $C_{S,g}$  – скорость звука в газе,  $\varphi$  – функция-идентификатор среды. В начале расчета она определяется следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{в области, занятой жидкостью,} \\ 0, & \text{в области, занятой газом,} \end{cases}$$

где  $\mathbf{x}$  – радиус-вектор точки пространства. Изменение функции  $\varphi$  описывается уравнением переноса

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi = 0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{u}$  – локальная скорость среды. При численном решении этого уравнения функция-идентификатор может принимать промежуточные значения между 0 и 1. В таком случае контактная граница находится в области ненулевого градиента функции  $\varphi$ .

Как и в работе [43], решение системы (1) находится расщеплением уравнений на конвективную и неконвективную части. Конвективная часть аппроксимируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\varrho^* - \varrho^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \varrho^n &= 0, \\ \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n &= 0, \\ \frac{p^* - p^n}{\Delta t} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla p^n &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

Звездочкой обозначаются величины после расчета конвективной части. Неконвективная часть аппроксимируется соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\varrho^{n+1} - \varrho^*}{\Delta t} &= -\varrho^* \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}, \\ \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} &= -\frac{\nabla p^{n+1}}{\varrho^*}, \\ \frac{p^{n+1} - p^*}{\Delta t} &= -\varrho^* C_s^{2*} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для расчета конвективной части применяется метод CIP (Constrained Interpolation Profile) [43] – один из вариантов полулагранжевого метода. В этом методе на каждом временном шаге требуется определить положение и характеристики лагранжевой частицы, которая придет в рассматриваемый узел эйлеровой сетки. В частности, решение уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = 0 \quad (5)$$

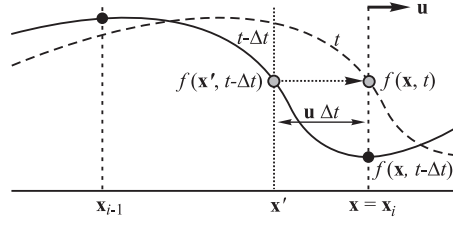


Рис. 1. Сплошная кривая – интерполяционный профиль функции в момент  $t - \Delta t$ ; штриховая – этот же профиль, смещенный в направлении движения среды на расстояние  $u\Delta t$

записывается в виде лагранжева инварианта  $f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}', t - \Delta t)$  (рис. 1), где  $\mathbf{x}'$  – координаты частицы среды в момент  $t - \Delta t$ , которая, перемещаясь со скоростью  $\mathbf{u}$ , попадает в момент  $t$  в точку  $\mathbf{x}$ . Точка  $\mathbf{x}$  совпадает с узлом сетки, в то время как  $\mathbf{x}'$  может и не совпадать. Таким образом, на каждом временном шаге для всех узлов сетки нужно определить положение отправных точек  $\mathbf{x}'$  и значение  $f(\mathbf{x}', t - \Delta t)$ . Чтобы найти  $f(\mathbf{x}', t - \Delta t)$ , в ячейке, в которой оказалась точка  $\mathbf{x}'$ , строится интерполяционный профиль функции. Его построение является ключевым моментом в СІР-методах. В настоящей работе применяется вариант RCІР (Rational-Cubic Interpolation Propagation) [43], в котором интерполяционная функция в одномерном случае в  $i$ -й ячейке представляется в виде

$$R_i^{1D}(x) = \left( \sum_{0 \leq p \leq 1} \alpha_p \beta_p X^p \right)^{-1} \sum_{0 \leq l \leq 3} C_{lx} X^{lx}. \quad (6)$$

Здесь  $X = x - x_i$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1, \quad \beta_0 = 1, \quad \alpha_1 = 1 \quad \text{при } g_i g_{iup} < 0, \quad \alpha_1 = 0 \quad \text{при } g_i g_{iup} \geq 0, \\ \beta_1 &= [|(S_i - g_i)/(g_{iup} - S_i)| - 1] \Delta_i^{-1}, \\ C_0 &= f_i, \quad C_1 = g_i + f_i \alpha_1 \beta_1, \quad C_2 = S_i \alpha_1 \beta_1 + (S_i - g_i) \Delta_i^{-1} - C_3 \Delta_i, \\ C_3 &= [g_i - S_i + (g_{iup} - S_i)(1 + \alpha_1 \beta_1 \Delta_i)] \Delta_i^{-2}, \end{aligned}$$

где  $iup = i - 1$  при  $u > 0$ ,  $iup = i + 1$  при  $u \leq 0$ ,  $\Delta_i = x_{iup} - x_i$ ,  $g_i = \partial_x f_i$ ,  $S_i = (f_{iup} - f_i)/\Delta_i$ . Все эти коэффициенты вычисляются по известным на  $n$ -м временном шаге значениям искомой функции  $f$  и ее пространственной производной  $g = \partial_x f$ . Определенная таким образом интерполяционная функция  $R_i^{1D}(x)$  обладает свойством снижения порядка интерполяции в областях с резким изменением решения. Она обеспечивает интерполяцию третьего порядка при  $\alpha_1 = 0$  или в областях, где решение гладкое (то есть  $\beta_1 \rightarrow 0$ ). В ячейках, где решение имеет локальный экстремум и  $\alpha_1 = 1$ ,  $R_i^{1D}(x)$  реализует интерполяцию более низкого порядка с сохранением выпуклости или вогнутости профиля решения. При этом решение уравнения переноса (5) имеет вид

$$f_i^* = R_i^{1D}(x_i - u\Delta t) = \frac{C_0 + C_1 \xi + C_2 \xi^2 + C_3 \xi^3}{1 + \alpha_1 \beta_1 \xi},$$

где  $\xi = -u\Delta t$ . При вычислении  $\xi$  в качестве  $u$  используется осредненное значение  $(u_i + u_i^{**})/2$ , где  $u_i^{**}$  – скорость в точке  $x_i - u_i \Delta t$ . Значение  $u_i^{**}$  предварительно рассчитывается также с помощью RCІР при  $u = u_i$ . В рамках RCІР производная  $g$ , как и сама функция  $f$ , является искомым параметром. Она рассчитывается



не через узловые значения функции  $f$ , а из уравнения, полученного дифференцированием уравнения для  $f$ . Например, если  $f$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = G,$$

где  $G$  — источниковые слагаемые, то это уравнение можно разделить на конвективную

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -u \frac{\partial f}{\partial x}$$

и неконвективную

$$\frac{\partial f}{\partial t} = G$$

части. При этом  $g$  будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial x} - g \frac{\partial u}{\partial x},$$

которое также расщепляется на конвективную и неконвективную части:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial x} - g \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (8)$$

Решение конвективной части (7) осуществляется простым дифференцированием интерполяционной функции, построенной для  $f$

$$g_i^* = \partial_x f_i^* = \frac{dR_i^{1D}}{dx}(x_i - u\Delta t) = \frac{C_1 + C_2\xi + C_3\xi^2}{1 + \alpha_1\beta_1\xi} - \alpha_1\beta_1 \frac{C_0 + C_1\xi + C_2\xi^2 + C_3\xi^3}{(1 + \alpha_1\beta_1\xi)^2}.$$

Способ решения (8) обсуждается ниже при описании неконвективной стадии расчета.

В двумерном случае интерполяционная функция имеет вид [65]

$$R_{i,j}^{2D}(x, y) = \left( \sum_{0 \leq p+q \leq 1} \alpha_{p,q} \beta_{p,q} X^p Y^q \right)^{-1} \sum_{0 \leq lx+ly \leq 3} C_{lx,ly} X^{lx} Y^{ly},$$

где  $X = x - x_i$  и  $Y = y - y_i$ ,

$$\alpha_{0,0} = 1, \quad \beta_{0,0} = 1,$$

$$\alpha_{1,0} = 1 \quad \text{при } g_{x i,j} g_{x iup,j} < 0, \quad \alpha_{1,0} = 0 \quad \text{при } g_{x i,j} g_{x iup,j} \geq 0,$$

$$\alpha_{0,1} = 1 \quad \text{при } g_{y i,j} g_{y i,jup} < 0, \quad \alpha_{0,1} = 0 \quad \text{при } g_{y i,j} g_{y i,jup} \geq 0,$$

$$\beta_{1,0} = [|(S_x - g_{x i,j})/(g_{x iup,j} - S_x)| - 1] \Delta_x^{-1},$$

$$\beta_{0,1} = [|(S_y - g_{y i,j})/(g_{y i,jup} - S_y)| - 1] \Delta_y^{-1},$$

$$C_{0,0} = f_{i,j}, \quad C_{1,0} = g_{x i,j} + \alpha_{1,0} \beta_{1,0} f_{i,j}, \quad C_{0,1} = g_{y i,j} + \alpha_{0,1} \beta_{0,1} f_{i,j},$$

$$C_{2,0} = [(1 + \alpha_{1,0} \beta_{1,0} \Delta_x) f_{iup,j} - C_{0,0} - C_{1,0} \Delta_x] \Delta_x^{-2} - C_{3,0} \Delta_x,$$

$$C_{0,2} = [(1 + \alpha_{0,1} \beta_{0,1} \Delta_y) f_{i,jup} - C_{0,0} - C_{0,1} \Delta_y] \Delta_y^{-2} - C_{0,3} \Delta_y,$$

$$\begin{aligned}
 C_{3,0} &= [(1 + \alpha_{1,0}\beta_{1,0}\Delta_x)(g_{x\,iup,j} - S_x) + g_{x\,i,j} - S_x] \Delta_x^{-2}, \\
 C_{0,3} &= [(1 + \alpha_{0,1}\beta_{0,1}\Delta_y)(g_{y\,i,jup} - S_y) + g_{y\,i,j} - S_y] \Delta_y^{-2}, \\
 C_{1,1} &= [\alpha_{0,1}\beta_{0,1}f_{iup,j} + (1 + \alpha_{1,0}\beta_{1,0}\Delta_x)g_{y\,iup,j}] \Delta_x^{-1} + \\
 &\quad + [\alpha_{1,0}\beta_{1,0}f_{i,jup} + (1 + \alpha_{0,1}\beta_{0,1}\Delta_y)g_{x\,i,jup}] \Delta_y^{-1} + \\
 &\quad + \left[ C_{0,0} - \left( \sum_{0 \leq p+q \leq 1} \alpha_{p,q}\beta_{p,q}\Delta_x^p\Delta_y^q \right) f_{iup,jup} \right] \Delta_x^{-1}\Delta_y^{-1} + \\
 &\quad + C_{3,0}\Delta_x^2\Delta_y^{-1} + C_{0,3}\Delta_y^2\Delta_x^{-1} + C_{2,0}\Delta_x\Delta_y^{-1} + C_{0,2}\Delta_y\Delta_x^{-1}, \\
 C_{2,1} &= [\alpha_{0,1}\beta_{0,1}f_{iup,j} + (1 + \alpha_{1,0}\beta_{1,0}\Delta_x)g_{y\,iup,j} - C_{0,1}] \Delta_x^{-2} - C_{1,1}\Delta_x^{-1}, \\
 C_{1,2} &= [\alpha_{1,0}\beta_{1,0}f_{i,jup} + (1 + \alpha_{0,1}\beta_{0,1}\Delta_y)g_{x\,i,jup} - C_{1,0}] \Delta_y^{-2} - C_{1,1}\Delta_y^{-1}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $iup = i - 1$  при  $u_{i,j} > 0$ ,  $iup = i + 1$  при  $u_{i,j} \leq 0$ ,  $jup = j - 1$  при  $v_{i,j} > 0$ ,  $jup = j + 1$  при  $v_{i,j} \leq 0$ ,  $\Delta_x = x_{iup,j} - x_{i,j}$ ,  $\Delta_y = y_{i,jup} - y_{i,j}$ ,  $g_{x\,i,j} = \partial_x f_{i,j}$ ,  $g_{y\,i,j} = \partial_y f_{i,j}$ ,  $S_x = (f_{iup,j} - f_{i,j})\Delta_x^{-1}$ ,  $S_y = (f_{i,jup} - f_{i,j})\Delta_y^{-1}$ . На конвективной стадии значения искомой функции  $f$  и ее пространственных производных  $g_x$ ,  $g_y$  определяются выражениями

$$\begin{aligned}
 f_{i,j}^* &= R_{i,j}^{2D}(x_{i,j} - u\Delta t, y_{i,j} - v\Delta t), \\
 g_{x\,i,j}^* &= \frac{\partial R_{i,j}^{2D}}{\partial x}(x_{i,j} - u\Delta t, y_{i,j} - v\Delta t), \\
 g_{y\,i,j}^* &= \frac{\partial R_{i,j}^{2D}}{\partial y}(x_{i,j} - u\Delta t, y_{i,j} - v\Delta t),
 \end{aligned}$$

где  $u = (u_{i,j} + u_{i,j}^{**})/2$ ,  $v = (v_{i,j} + v_{i,j}^{**})/2$ , а  $u_{i,j}^{**}$ ,  $v_{i,j}^{**}$  — скорости в точке  $(x_{i,j} - u_{i,j}\Delta t, y_{i,j} - v_{i,j}\Delta t)$ . Значения  $u_{i,j}^{**}$ ,  $v_{i,j}^{**}$  предварительно рассчитываются с помощью РСIP при  $u = u_{i,j}$ ,  $v = v_{i,j}$ . Для вычисления производных  $g_x$ ,  $g_y$  на неконвективной стадии используется явная конечно-разностная аппроксимация, которая будет приведена ниже.

Для расчета функции-идентификатора  $\varphi$  метод РСIP применяется в сочетании со следующим приемом, позволяющим максимально сократить численную диффузию и немоноктонность решения в окрестности больших градиентов. Вместо уравнения (2) решается уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F = 0,$$

где

$$F = \text{tg} [(1 - \varepsilon)\pi(\varphi - 0.5)], \quad (9)$$

параметр  $\varepsilon$  определяет ширину размывания переходной области с ненулевым градиентом  $\varphi$ . Функция-идентификатор  $\varphi$  определяется через  $F$  посредством обратного преобразования. Такой подход позволяет уменьшить переходную область между контактирующими средами до размеров одной-двух ячеек. Он является весьма эффективным в случае изменения связности контактных границ, в частности когда границы делятся, пересекаются или сливаются. Нужно отметить, что способ снижения численной диффузии (9) применим только в случае четко определенного диапазона изменения искомого параметра. Так, он может быть использован при решении уравнения переноса для функции-идентификатора  $\varphi$  с известной

областью ее изменения  $[0, 1]$ , но не может применяться для скорости  $\mathbf{u}$ , давления  $p$ , а в случае сжимаемой жидкости – и для плотности  $\varrho$ .

На конвективной стадии метод RCIP применяется для решения уравнений переноса всех искомых параметров  $\varrho$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $\varphi$  или  $F$  (при использовании тангенциального преобразования (9)) и определения промежуточных значений пространственных производных от них. Окончательные значения производных рассчитываются на неконвективной стадии при решении набора уравнений типа (8). Конкретный вид каждого из этих уравнений определяется параметром, которому они соответствуют.

Для расчета неконвективной (акустической) части (4) применяется метод UP (Unified Procedure) [43]. Он является обобщением на сжимаемые среды методов расчета несжимаемых сред, использующих уравнение для давления (или для коррекции давления) таких, как MAC [66], SMAC [67], SIMPLE [68]. Одна из первых попыток такого обобщения предпринята в методе ICE [69]. Однако этот метод, как и его модификация PISO [70], основан на консервативном подходе, при котором возникают упомянутые во введении трудности при расчете течений с контактными границами. В методе CIP-CUP (CIP-Combined UP) применяются формулировка уравнений движения в неконсервативных переменных (плотность, скорость, давление) и расщепление расчета на конвективную и акустическую стадии. Это приводит к упрощению уравнения для давления, используемого на неконвективной стадии в методе UP, и открывает возможность расчета многофазных течений с большой разницей акустических импедансов фаз.

Если давление представляется в виде  $p = p(\varrho, s)$ , то при малых изменениях плотности  $\varrho$  и энтропии  $s$  для приращения давления  $\Delta p$  можно записать

$$\Delta p = \left( \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_s \Delta \varrho + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_\varrho \Delta s.$$

Если же энтропия постоянна, то

$$\Delta p = \left( \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_s \Delta \varrho = C_S^{*2} \Delta \varrho. \quad (10)$$

На неконвективной стадии согласно (4)

$$\Delta \varrho = \varrho^{n+1} - \varrho^* = -\Delta t \varrho^* \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}, \quad (11)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^* = -\Delta t \frac{\nabla p^{n+1}}{\varrho^*}. \quad (12)$$

Применяя операцию дивергенции ( $\nabla \cdot$ ) к уравнению (12) и выражая затем из него  $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}$  с учетом соотношения (10) и того, что  $\Delta p = p^{n+1} - p^*$ , получаем из (11) следующее уравнение:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla p^{n+1}}{\varrho^*} \right) = \frac{p^{n+1} - p^*}{\varrho^* C_S^{*2} \Delta t^2} + \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t}. \quad (13)$$

Описанная процедура может применяться для расчета течений с широким диапазоном проявления сжимаемости среды. Кроме того, она обеспечивает непрерывность отношения  $\nabla p / \varrho$  (которое в соответствии с (12) можно рассматривать как ускорение) на границе раздела сред даже при разнице плотностей порядка  $10^3$ , в отличие от методов ISE и PISO, которые этого не гарантируют.

В настоящей работе используется модификация метода UP, предложенная в [71] с целью повышения устойчивости и сходимости решения. Модификация основана

на схеме предиктор-корректор. На шаге предиктора находится промежуточное поле скорости по известному полю давления

$$\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^* = -\Delta t \frac{\nabla p^*}{\varrho^*}. \quad (14)$$

Вычитая (14) из (12), получаем

$$\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}} = -\Delta t \frac{\nabla \delta p}{\varrho^*}, \quad (15)$$

где  $\delta p = p^{n+1} - p^*$  – коррекция давления. Применяя операцию дивергенции к уравнению (15) и выражая  $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}$  из третьего уравнения из (4), приходим к следующему уравнению для коррекции давления:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla \delta p}{\varrho^*} \right) = \frac{\delta p}{\varrho^* C_S^{*2} \Delta t^2} + \frac{\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t}. \quad (16)$$

В настоящей работе уравнение (16) решается методом последовательной верхней релаксации.

На шаге корректора применяются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \varrho^{n+1} &= \varrho^* - \varrho^* \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}, \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \tilde{\mathbf{u}} - \Delta t \frac{\nabla \delta p}{\varrho^*} + \Delta t Q_u, \\ p^{n+1} &= p^* + \delta p + \Delta t Q_p. \end{aligned}$$

В этих соотношениях слагаемые  $\Delta t Q_u$  и  $\Delta t Q_p$  отвечают за обеспечение искусственной вязкости, которая нужна при расчетах течений с сильными ударными волнами, поскольку схема CIP-CUP не является консервативной. Эти слагаемые определяются следующими выражениями [58]:

$$\begin{aligned} Q_u &= -\frac{1}{\varrho} \nabla q_v, \\ Q_p &= -(\gamma - 1) q_v \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ q_v &= c_v \varrho \left( -C_S \Delta U + \frac{\gamma + 1}{2} \Delta U^2 \right), \\ \Delta U &= \min(0, \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}), \\ \lambda &= \Delta x = \Delta y. \end{aligned}$$

Коэффициент искусственной вязкости  $c_v$  обычно принимается для газа в интервале  $(0.5, 1)$ , а для жидкости – в интервале  $(0, 0.5)$ .

При обновлении пространственных производных от искомым параметров на неконвективной стадии согласно (8) сложностей с определением пространственных производных от источниковых слагаемых  $G$  можно избежать. Действительно, пусть в одномерном случае на неконвективной стадии уравнение  $\partial f / \partial t = G$  аппроксимируется выражением

$$f_i^{n+1} = f_i^* + G_i \Delta t.$$

Тогда для  $\partial G / \partial x$  в уравнении (8) вместо аппроксимации

$$\frac{G_{i+1} - G_{i-1}}{2\Delta x_i}$$

МОЖНО ИСПОЛЬЗОВАТЬ

$$\frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^* - f_{i-1}^{n+1} + f_{i-1}^*}{2\Delta t \Delta x_i}.$$

С учетом этого аппроксимацию уравнения (8) можно записать как

$$\frac{g_i^{n+1} - g_i^*}{\Delta t} = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^* - f_{i-1}^{n+1} + f_{i-1}^*}{2\Delta t \Delta x_i} - g_i^* \frac{(u_{i+1} - u_{i-1})}{2\Delta x_i}.$$

В двумерном случае для обновления пространственных производных  $g_x = \partial_x f$ ,  $g_y = \partial_y f$  на неконвективной стадии используется следующая конечно-разностная аппроксимация [72]:

$$\begin{aligned} g_{x\,i,j}^{n+1} &= g_{x\,i,j}^* + \frac{f_{i+1,j}^{n+1} - f_{i+1,j}^* - f_{i-1,j}^{n+1} + f_{i-1,j}^*}{2\Delta x_{i,j}} - \\ &\quad - g_{x\,i,j}^* \frac{(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})\Delta t}{2\Delta x_{i,j}} - g_{y\,i,j}^* \frac{(v_{i+1,j} - v_{i-1,j})\Delta t}{2\Delta x_{i,j}}, \\ g_{y\,i,j}^{n+1} &= g_{y\,i,j}^* + \frac{f_{i,j+1}^{n+1} - f_{i,j+1}^* - f_{i,j-1}^{n+1} + f_{i,j-1}^*}{2\Delta y_{i,j}} - \\ &\quad - g_{x\,i,j}^* \frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})\Delta t}{2\Delta y_{i,j}} - g_{y\,i,j}^* \frac{(v_{i,j+1} - v_{i,j-1})\Delta t}{2\Delta y_{i,j}}. \end{aligned} \quad (17)$$

В дальнейшем сочетание метода CIP-CUP с вышеописанной методикой выявления контактной границы на эйлеровых сетках будет упоминаться как CIP-CUP1.

## 2. Верификация методики расчета

Проверка правильности работы алгоритма и программы расчета осуществлялась на примере задачи о вращении твердого диска с вырезом [73] и о распаде разрыва на контактной границе между газом и жидкостью.

**2.1. Вращение твердого диска с вырезом.** Конвективная часть уравнений движения сред (3) вместе с уравнением для функции-идентификатора (2) представляют собой набор уравнений переноса для параметров  $\varrho$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $\varphi$ . Тестирование реализации метода RCIP, применяемого для их численного решения, осуществляется с использованием задачи о вращении твердого диска с вырезом в области  $0 \leq x \leq 100$ ,  $0 \leq y \leq 100$  вокруг точки  $x = 50$ ,  $y = 50$  [73].

Диск вращается вместе со средой, безразмерное поле скорости которой имеет вид  $u = (y - 50)$ ,  $v = -(x - 50)$ . Рассматривается один оборот вокруг центра вращения. Изменение положения диска определяется решением уравнения переноса для функции-идентификатора  $\varphi$ . В начальный момент времени в области, соответствующей диску,  $\varphi$  полагается равной 1, а вне этой области — 0. Уравнение переноса для  $\varphi$  решается на равномерной сетке, состоящей из  $100 \times 100$  ячеек с пространственными шагами  $\Delta x = \Delta y = 1$ . Шаг по времени  $\Delta t = 0.01$ . Результаты расчетов приведены на рис. 2.

Положение диска определяется по пространственному полю функции-идентификатора  $\varphi$ : диск находится в области, где  $\varphi = 1$ , а граница диска — там, где  $0 < \varphi < 1$ . Согласно начальной дискретизации  $\varphi$  изменяется от 0 до 1 в области шириной в одну ячейку, поэтому в поле изолиний функции  $\varphi$  начальная граница диска выглядит как четкий контур (рис. 2, а). При решении уравнения переноса (2) методом RCIP с малой, но все же ненулевой численной диффузией изначально

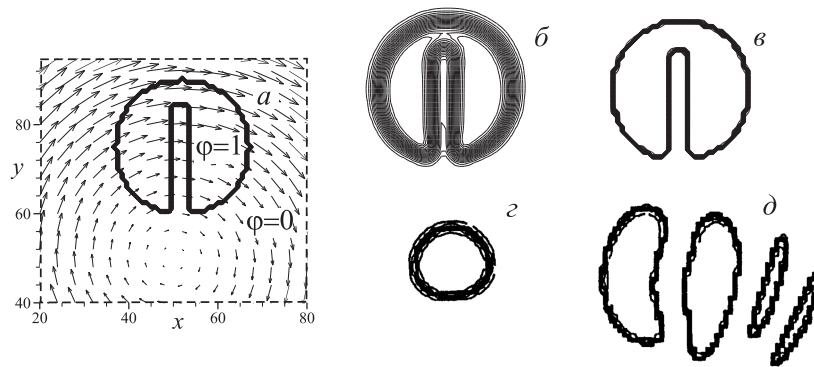


Рис. 2. Изолинии функции  $\varphi$ , описывающие поверхность твердого диска с вырезом, в начале его вращения (а) и после завершения одного оборота, рассчитанные методами RCIP (б), RCIP с тангенциальным преобразованием (9) (в), с использованием схем против потока (г) и Лакса – Вендроффа (д) с тангенциальным преобразованием. Результаты (з) и (д) получены в [74]. В начальный момент времени (а), для которого представлена также часть расчетной области с полем скорости, все изолинии слились в одну жирную кривую, представляющую собой начальную границу диска

резкий профиль  $\varphi$  на границе диска размывается, так что неопределенность положения границы в конце одного оборота увеличивается (рис. 2, б). Однако монотонность решения сохраняется, и форма границы, несмотря на размывание, имеет вид, подобный начальному. Если метод RCIP применяется в сочетании с антидиффузионным тангенциальным преобразованием (9), то профиль диска в поле изолиний функции  $\varphi$  в конце вращения (рис. 2, в) практически полностью совпадает с начальным. Поэтому можно заключить, что используемый в настоящей работе метод расчета конвективных слагаемых позволяет получать монотонные решения в области больших градиентов и характеризуется малой численной диффузией. При расчете конвективной части уравнений движения сред метод RCIP применяется для вычисления параметров  $\rho$ ,  $u$ ,  $p$ . При дополнительном использовании тангенциального преобразования для вычисления функции-идентификатора  $\varphi$  граница между средами на протяжении всего расчета размывается не более чем на одну-две ячейки. Нужно отметить, что применение тангенциального преобразования улучшает не все схемы [74]. Так, и в сочетании с этим преобразованием схема “против потока” (рис. 2, г) и схема Лакса – Вендроффа (рис. 2, д) дают очень большие искажения границы диска. При этом схема “против потока” остается диффузионной, а схема Лакса – Вендроффа – немонотонной.

**2.2. Распад разрыва на границе газ – жидкость.** Для тестирования полного алгоритма расчета, состоящего из конвективной и акустической стадии, используется одномерная задача о распаде плоского разрыва со скачком давления на границе газ – жидкость.

Расчет проводится в области  $[0, 5x_0]$ , где  $x_0$  – начальное положение разрыва, на равномерной сетке из 600 ячеек с шагом  $\Delta x = 0.03$  м и числом Куранта 0.8. Параметры сред ( $\rho$ ,  $p$ ,  $u$ ,  $\gamma$ ,  $B$ ) по разные стороны разрыва заданы следующим образом (1 кг/м<sup>3</sup>; 1 атм; 0; 1.4; 0) для газа при  $x < x_0$  и (1.2·10<sup>3</sup> кг/м<sup>3</sup>; 5·10<sup>3</sup> атм; 0; 7; 3·10<sup>3</sup> атм) для жидкости при  $x \geq x_0$ . Коэффициенты искусственной вязкости полагаются равными 0.6 для газа и 0 – для жидкости. Результаты расчетов и аналитическое решение представлены на рис. 3.

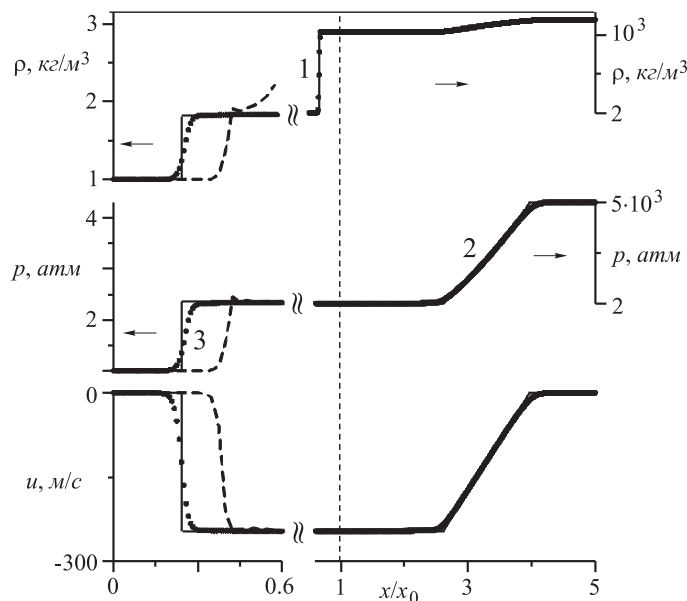


Рис. 3. Распад разрыва на границе газ (слева) – жидкость (справа);  $x_0$  – начальное положение разрыва (отмечено вертикальной штриховой линией). Сплошные кривые – аналитическое решение Римана, символы  $\bullet$  – численное решение методом CIP-CUP1, штриховые кривые – численное решение методом CIP-CUP1 без искусственной вязкости. Цифрами отмечены: 1 – движущая влево контактная граница; 2 – волна разрежения, распространяющаяся по жидкости вправо; 3 – ударная волна, распространяющаяся по газу влево

Как видно, при численном решении задачи методом CIP-CUP1 без использования искусственной вязкости положение контактной границы (кривые 1) и волны разрежения в жидкости (кривые 2) хорошо согласуется с аналитическим решением Римана, а в окрестности фронта ударной волны в газе (кривые 3) возникают осцилляции давления и положение ее фронта получается неверным (штриховые кривые). Корректный расчет ударной волны удастся реализовать только с использованием искусственной вязкости (символы  $\bullet$ ).

### 3. Иллюстрация возможностей метода

Для иллюстрации возможностей реализованной методики расчета рассматривается задача об ударном воздействии высокоскоростной струи жидкости по твердой стенке. Предполагается, что параметры струи соответствуют параметрам струйки жидкости, возникающей на поверхности кавитационного пузырька при его схлопывании либо в контакте со стенкой, либо на небольшом удалении от нее. Эта задача связана с проблемой кавитационного разрушения поверхностей тел, которая представляет значительный интерес в связи со многими практическими приложениями. Несмотря на большое количество исследований воздействия кавитационных пузырьков на стенку [40, 44, 75–77], ряд важных аспектов такого воздействия до сих пор остается неизученным. К ним, в частности, относится рассматриваемый в настоящей работе режим ударного воздействия, при котором в финальной стадии сжатия пузырька в жидкости возникают ударные волны.

Как показывают эксперименты [78–81], в процессе несферичного схлопывания пузырька у стенки возможен сценарий с формированием направленной к стенке высокоскоростной струйки жидкости, которая пересекает полость пузырька и бьет

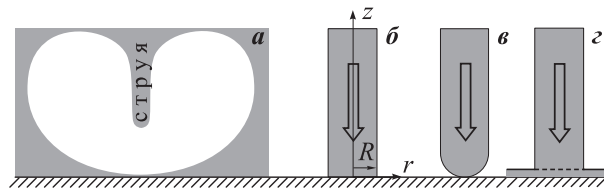


Рис. 4. Схема ударного воздействия пузырька на стенку

либо по противоположной части поверхности пузырька (если пузырек не примыкает к стенке), либо непосредственно по стенке (в случае примыкания). Расчеты [82] показывают, что наибольшие скорости струйки достигаются в случае, когда диаметр струйки мал по сравнению с размерами пузырька (рис. 4, а). В связи с этим на начальном этапе исследования ударного воздействия пузырька на твердую поверхность влиянием верхней и боковых границ пузырька можно пренебречь. В результате ударное воздействие струйки можно моделировать как удар столбика жидкости по стенке (рис. 4, б, в) или по жидкой прослойке на ней (рис. 4, г).

В настоящей работе рассматривается осесимметричная задача об ортогональном ударе цилиндрической струи жидкости с плоским (рис. 4, б) или полусферическим (рис. 4, в) концом по неподвижной плоской твердой стенке или по тонкой жидкой прослойке на ней (рис. 4, г). Струя считается бесконечно длинной и окруженной неограниченным объемом газа. Эффекты вязкости, теплопроводности жидкости и газа, а также влияние поверхностного натяжения не учитываются. Для жидкости начальные значения параметров полагаются следующими:  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\gamma = 7.15$ ,  $B = 3047$  атм, для газа:  $\rho = 1$  кг/м<sup>3</sup>,  $\gamma = 1.4$ ,  $B = 0$ . В начальный момент времени давление всюду равно 1 атм. Радиус струи 25 мкм, ее скорость 500 м/с. Эти значения соответствуют ударному воздействию на тело кумулятивной струйки жидкости, образующейся на поверхности кавитационного пузырька в воде при комнатных условиях в том случае, когда пузырек примыкает к телу и в начале схлопывания имеет вид сплюснутого сфероида (эллипсоида вращения с отношением полуосей  $\sim 0.84$ ). Коэффициент искусственной вязкости  $c_v$  в жидкости полагается равным 0.4, а в газе — 0.9. Применяются равномерные или сгущающиеся у стенки расчетные сетки с соотношением числа ячеек вдоль координатных направлений примерно равным  $400 \times 300$ . Число Куранта варьировалось в интервале  $0.8 \div 0.9$ .

### 3.1. Удар струи жидкости с плоским концом по твердой стенке.

Схема рассматриваемого удара струи жидкости с плоским концом по твердой стенке изображена на рис. 4, б. На рис. 5 представлено сопоставление расчетных сеток настоящей работы (а) и работы [77] (б), а также формы струи в некоторый момент времени на стадии ее растекания. В работе [77] сетка является адаптивно-подвижной, а влияние окружающего газа не учитывается. Для наглядности сетки разрежены в 8 раз по каждому направлению.

В настоящей работе граница струи определяется неявно, ее положение, рассчитанное на эйлеровой сетке, показано жирной кривой на рис. 5, а. Эта граница образована набором близкорасположенных изолиний функции-идентификатора  $\varphi$ , подобно тому, как кривая ударной волны образуется близкорасположенными изолиниями давления. В работе [77] расчетная сетка подстраивается под границу струи, которая всегда является координатной линией сетки (рис. 5, б), а уравнения движения среды решаются с применением модификации метода Годунова второго порядка точности.



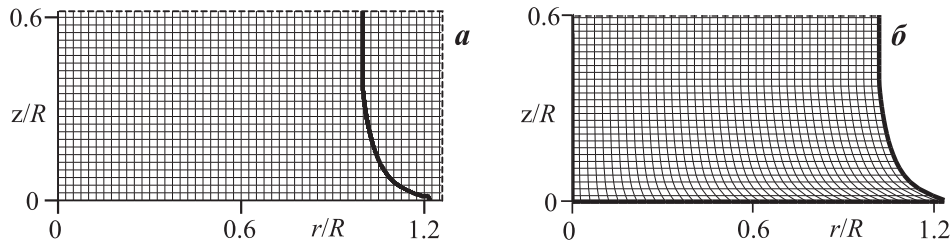


Рис. 5. Расчетные сетки в области взаимодействия струи с плоским концом со стенкой и граница струи (жирная кривая) на стадии растекания: *a* – эйлерова сетка и рассчитанная на ней методом CIP-CUP1 граница струи; *б* – адаптивно-подвижная сетка работы [77], правой границей которой является граница струи. Левая граница сеток является осью симметрии

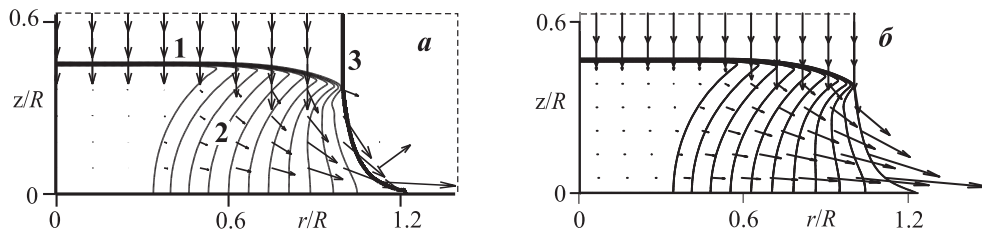


Рис. 6. Прореженное поле скорости, изолинии давления и изолинии функции-идентификатора (*a*) в момент времени, которому соответствует рис. 5: *a* – расчет методом CIP-CUP1; *б* – результаты из работы [77]. Цифрами отмечены: 1 – ударная волна; 2 – волна разрезания; 3 – граница струи

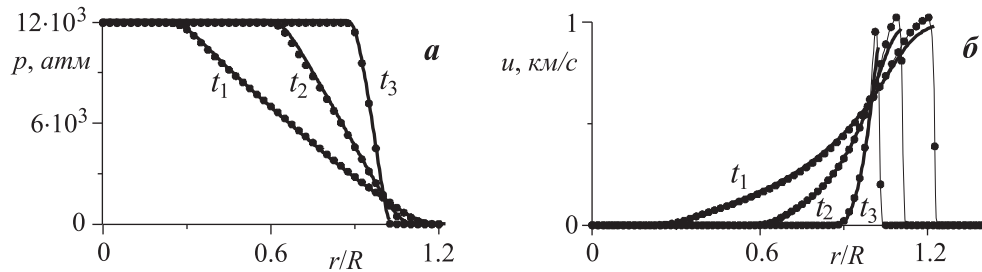


Рис. 7. Распределения давления (*a*) и горизонтальной составляющей скорости (*б*) на стенке в последовательные моменты времени  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  в случае удара струи с плоским концом: символы  $\bullet$  – расчет методом CIP-CUP1; сплошные кривые – результаты из работы [77]

На рис. 6 представлено сопоставление изолиний давления и полей скорости, полученных в настоящей работе методом CIP-CUP1 (*a*) и в работе [77] (*б*) в тот же момент времени, что и на рис. 5. На рис. 7 показано сравнение полученных методом CIP-CUP1 и в [77] распределений давления и скорости на стенке для нескольких моментов времени. Следует отметить, что ударная волна 1 (рис. 6, *a*), возникающая в струе в момент удара по стенке, является довольно интенсивной. Скорость ее распространения составляет  $\sim 1900$  м/с (для сравнения скорость звука в невозмущенной струе  $\sim 1500$  м/с), а перепад давления на ее фронте  $\sim 10^4$  атм. Согласно рис. 6, 7 применение искусственной вязкости позволяет корректно определить как положение ударной волны, так и значение давления за ее фронтом. Таким образом,

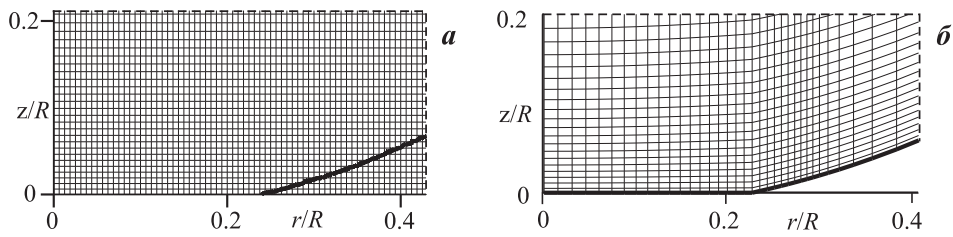


Рис. 8. Расчетные сетки в области взаимодействия струи с полусферическим концом стенки в конце стадии натекания струи: *a* – сетка настоящей работы; *б* – адаптивно-подвижная сетка работы [77]. Жирная кривая – граница струи

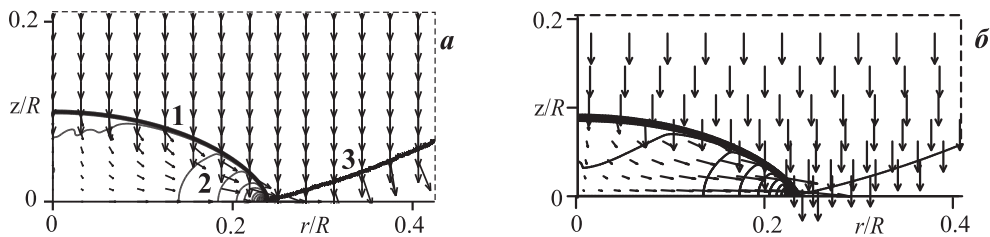


Рис. 9. Прореженное поле скорости, изолинии давления и изолинии функции-идентификатора (*a*) в конце стадии натекания струи в момент времени, которому соответствует рис. 8: *a* – расчет методом CIP-CUP1; *б* – результаты из работы [77]. Цифрами отмечены: 1 – ударная волна; 2 – волна разрежения; 3 – граница струи

несмотря на существенное различие методик работы [77] и настоящей работы, согласование результатов вполне удовлетворительное, что свидетельствует о работоспособности настоящей реализации метода CIP-CUP1.

**3.2. Удар струи жидкости с полусферическим концом по твердой стенке.** Следующим шагом в моделировании ударного воздействия на стенку кумулятивной струйки, образующейся при несферическом схлопывании пузырька, является решение задачи об ударе цилиндрической струи с полусферическим концом по твердой стенке. Эта задача ближе к реальным условиям по сравнению с рассмотренным выше ударом цилиндрической струи с плоским концом, но и более сложна для численного моделирования (рис. 4, *в*). Одна из особенностей этой задачи заключается в том, что начальное натекание струи сменяется в некоторый момент ее растеканием с образованием тонкой пристеночной струйки [12, 77]. При этом использование адаптивно-подвижных сеток [77] усложняется в связи с их сильными деформациями, необходимостью редискретизации расчетной области с применением сеток различающейся топологии и интерполяции решения с одной сетки на другую.

Результаты расчетов удара струи жидкости с полусферическим концом по твердой стенке приведены на рис. 8–11. На рис. 8 показано сопоставление расчетных сеток, применяемых в настоящей работе (*a*) и в расчетах [77] (*б*), а также формы струи в конце стадии ее натекания, за которой следует растекание. На рис. 9 дается соответствующее рис. 8 сопоставление изолиний давления и полей скорости в конце стадии натекания струи на стенку. Как видно, положение границы струи (кривая 3), а также положение и криволинейная форма ударной волны в струе (кривая 1), полученные с помощью метода CIP-CUP1, хорошо согласуются с результатами [77]. При этом важно отметить, что в настоящей работе начальный

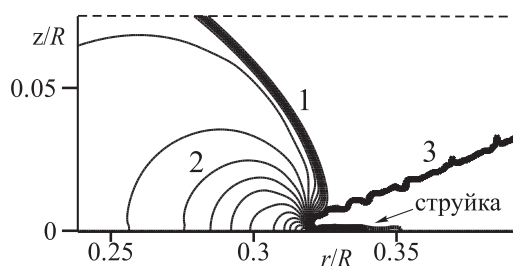


Рис. 10. Растекание струи с полусферическим концом: 1 – ударная волна; 2 – волна разрежения; 3 – граница струи

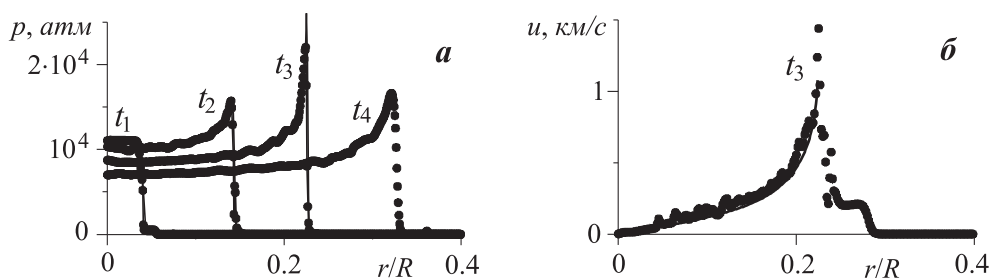


Рис. 11. Радиальные распределения давления (а) и горизонтальной составляющей скорости (б) на стенке в последовательные моменты времени  $t_1, t_2, t_3, t_4$  в случае удара струи с полусферическим концом: символы  $\bullet$  – расчет методом CIP-CUP1; сплошные кривые – результаты из работы [77]. Моменту  $t_3$  в конце стадии натекания струи соответствуют рис 8, 9, моменту  $t_4$  на стадии растекания соответствует рис. 10

полукруглый профиль струи аппроксимируется на эйлеровой сетке отрезками прямых, что вносит определенные погрешности в результаты. Для уменьшения этих погрешностей необходимо измельчать сетку. В настоящей работе с целью сокращения объема вычислений осуществлялось сгущение расчетной сетки у стенки.

В работе [77] была рассчитана только стадия натекания струи. Расчет ее дальнейшего растекания не осуществлялся в связи со значительными сложностями перестройки сеток. В то же время метод CIP-CUP1 позволяет рассчитывать не только всю стадию натекания струи, но и ее последующее растекание (с формированием тонкой пристеночной струйки) (рис. 10). При этом каких-либо дополнительных трудностей не возникает. На рис. 11, а приведено сравнение полученных в настоящей работе методом CIP-CUP1 и в работе [77] пристеночных распределений давления. Представлены четыре последовательных момента времени, включая момент растекания струи (которому соответствует рис. 10), рассчитанный только методом CIP-CUP1. Можно отметить хорошее согласование с результатами из работы [77] как значений давления за фронтом ударной волны (кривые, соответствующие моменту  $t_1$ ), так и распределений давления на стенке в моменты  $t_1, t_2, t_3$ . Некоторая немонотонность кривых давления, полученных с использованием CIP-CUP1, а также меньшее по сравнению с [77] максимальное значение давления на пике в окрестности контакта границы струи со стенкой в момент  $t_3$  могут быть обусловлены несовпадением границы струи с узлами сетки и аппроксимацией этой границы отрезками прямых линий. При измельчении сетки эти отличия от результатов работы [77] уменьшаются. На рис. 11, б сравниваются профили горизонтальной составляющей скорости на стенке в конце стадии натекания струи (для большей

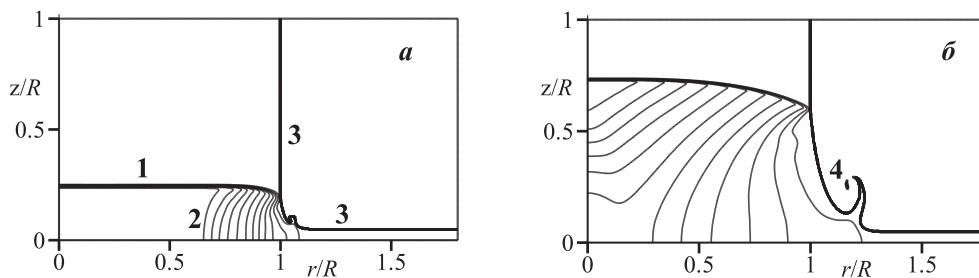


Рис. 12. Удар струи с плоским концом по тонкому слою жидкости на стенке. Изолинии давления и функции-идентификатора: *a* – на начальной стадии удара; *б* – на стадии развития выплеска с отрывом маленькой капли. Цифрами отмечены: 1 – ударная волна; 2 – волна разрежения; 3 – границы струи и жидкой прослойки с выплеском; 4 – капля

наглядности только в момент, которому соответствуют рис. 8, 9), полученные в настоящей работе методом CIP-CUP1 и в работе [77]. Наряду с хорошим согласованием положения максимума горизонтальной скорости с результатами [77], можно отметить немонотонный характер кривой настоящей работы и большее значение максимума. Эти отличия также могут быть обусловлены особенностями аппроксимации криволинейной границы контакта на прямолинейной сетке и уменьшаются по мере ее измельчения.

Из рис. 8, 9 и 11 можно заключить, что, несмотря на погрешности, связанные с аппроксимацией гладких кривых на эйлеровой сетке отрезками прямых линий, согласование результатов расчетов методом CIP-CUP1 с расчетами работы [77] вполне удовлетворительное. При этом следует подчеркнуть, что метод CIP-CUP1 позволяет избежать характерных для метода адаптивно-подвижных сеток трудностей, связанных с большим деформированием сеток.

**3.3. Удар струи жидкости с плоским концом по жидкой прослойке на твердой стенке.** Когда пузырек не примыкает к стенке, а находится на относительно небольшом (порядка его радиуса) удалении от нее, струйка, формирующаяся при несферическом схлопывании пузырька, ударяет по жидкой прослойке между пузырьком и стенкой. При этом воздействие на стенку осуществляется посредством ударных волн, возникающих в жидкой прослойке в момент удара. Этот вариант для струи с плоским концом схематично показан на рис. 4, *г*. Отличие от постановки рассмотренной в п. 3.1. задачи об ударе струи с плоским концом по стенке состоит лишь в том, что в данном случае на стенке имеется тонкий слой жидкости, которая идентична жидкости в струе. В то же время из-за сильного деформирования контактной границы данный случай гораздо сложнее для численного моделирования на основе адаптивно-подвижных сеток. Поэтому эта задача не была решена авторами работы [77].

На рис. 12 представлены результаты расчета с использованием метода CIP-CUP1 удара струи жидкости с плоским концом по жидкой прослойке на твердой стенке. Как видно, данный случай характеризуется не только сильной деформацией границы контакта газ–жидкость при формировании выплеска жидкости в результате удара струи по жидкой прослойке (рис. 12, *а*), но и изменением связности контактной границы при срыве маленькой капли жидкости с вершины выплеска (рис. 12, *б*). Метод CIP-CUP1 позволяет рассчитывать такие межфазные взаимодействия естественным образом, не выходя за рамки имеющихся численных алгоритмов.

### Заключение

Представлен краткий обзор работ по численному моделированию задач контактного взаимодействия сжимаемых сред, в том числе с большой разницей акустических импедансов при сильных деформациях контактной границы и при наличии в средах ударных волн. Приведены основные положения реализованной методики расчета таких задач на основе метода CIP-CUP, в которой применяются эйлеровы сетки без явного выделения контактных границ. Такой подход позволяет избежать проблем с построением расчетных сеток как при сильных деформациях границ, так и при изменении их топологии. Представлены результаты расчетов модельных задач, имеющих аналитическое решение, подтверждающие эффективность созданного алгоритма. Возможности реализованной методики проиллюстрированы на задачах об ударе осесимметричной высокоскоростной струи жидкости по жесткой стенке и по тонкому слою жидкости на жесткой стенке. Полученные результаты сопоставлены с известными численными решениями, рассчитанными методом адаптивно-подвижных сеток с явным выделением межфазной границы. В некоторых случаях сопоставление проведено лишь на начальной стадии удара, поскольку дальнейшее применение метода адаптивно-подвижных сеток становилось проблематичным. Показано удовлетворительное согласование результатов.

Работа выполнена в рамках программы РАН, гранта президента РФ (МК-2712.2011.1) и при поддержке РФФИ (проект № 12-01-00341-а).

### Summary

*A.A. Aganin, T.S. Guseva.* Numerical Simulation of Contact Interaction of Compressible Fluids on Eulerian Grids.

A short review on numerical simulation of the problems of contact interaction between compressible media with a strong difference in their acoustic impedances, with large deformations of contact boundary and with shock waves present in them is given. The main ideas underlying a numerical algorithm developed for solving such problems on the basis of the known CIP-CUP (Constrained Interpolation Profile Combined Unified Procedure) approach using Eulerian grids without explicit separation of contact interfaces, and governing equations of compressible fluid flow in terms of nonconservative variables are described. Robustness of the developed algorithm is demonstrated by the results of computation of some test problems having analytical solutions. The capabilities of the realized technique are illustrated by its application to the problems of impact of an axially-symmetric high-speed liquid jet on a rigid wall and on a thin liquid layer on a rigid wall. The obtained results are in satisfactory agreement with the known numerical solutions computed by the method of adaptively moving meshes with an explicit separation of the interphase boundary.

**Key words:** multiphase compressible flows, large deformation of interface, Eulerian grid, interface capturing, CIP-CUP method.

### Литература

1. *Benson D.J.* Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes // *Comput. Method. Appl. M.* – 1992. – V. 99, No 2–3. – P. 235–394.
2. *Mair H.U.* Review: hydrocodes for structural response to underwater explosions // *Shock Vib.* – 1999. – V. 6, No 2. – P. 81–96.
3. *Allaire G., Clerc S., Kokh S.* A five-equation model for the simulation of interfaces between compressible fluids // *J. Comput. Phys.* – 2002. – V. 181, No 2. – P. 577–616.
4. *Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н.* Обзор контактных алгоритмов // *Изв. РАН. МТТ.* – 2005. – № 1. – С. 45–87.

5. *Kadioglu S.Y., Sussman M., Osher S., Wright J.P., Kang M.* A second order primitive preconditioner for solving all speed multi-phase flows // J. Comput. Phys. – 2005. – V. 209, No 2. – P. 477–503.
6. *Garimella R., Dyadechko V., Swartz B., Shashkov M.* Interface reconstruction in multi-fluid, multi-phase flow simulations // Proc. 14th Int. Meshing Roundtable. – Springer, 2005. – P. 19–32.
7. *Johnsen E., Colonius T.* Implementation of WENO schemes in compressible multicomponent flow problems // J. Comput. Phys. – 2006. – V. 219, No 2. – P. 715–732.
8. *Hu X.Y., Khoo B.C., Adams N.A., Huang F.L.* A conservative interface method for compressible flows // J. Comput. Phys. – 2006. – V. 219, No 2. – P. 553–578.
9. *Kim J., Lowengrub J.* Interfaces and multicomponent fluids // Encyclopedia of Mathematical Physics. – Elsevier, 2006. – P. 135–144.
10. *Donghong W., Ning Z., Ou H., Jianming L.* A Ghost Fluid based Front Tracking Method for multimediuim compressible flows // Acta Math. Sci. – 2009. – V. 29, No 6. – P. 1629–1646.
11. *So K.K., Hu X.Y., Adams N.A.* Anti-diffusion method for interface steepening in two-phase incompressible flow // J. Comput. Phys. – 2011. – V. 230, No 13. – P. 5155–5177.
12. *Чижев А.В., Шмидт А.А.* Высокоскоростной удар капли о преграду // Журн. теорет. физики. – 2000. – Т. 70, Вып. 12. – С. 18–27.
13. *Головачев Ю.П., Ноткина Е.А., Чижев А.В., Шмидт А.А.* Расчет ударно-волновых течений со свободными поверхностями // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2001. – Т. 41, № 1. – С. 157–167.
14. *Годунов С.К., Забродин А.В. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
15. *Unverdi S.O., Tryggvason G.* A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows // J. Comput. Phys. – 1992. – V. 100, No 1. – P. 25–37.
16. *Cocchi J.-P., Saurel R.* A Riemann problem based method for the resolution of compressible multimaterial flows // J. Comput. Phys. – 1997. – V. 137, No 2. – P. 265–298.
17. *Glimm J., Grove J.W., Li X.-L., Shyue K.-M., Zhang Q., Zeng Y.* Three dimensional Front Tracking // SIAM J. Sci. Comput. – 1998. – V. 19, No 3. – P. 703–727.
18. *Glimm J., Grove J., Li X.-L., Tan D.* Robust computational algorithms for dynamic interface tracking in three dimensions // SIAM J. Sci. Comput. – 2000. – V. 21, No 6. – P. 2240–2256.
19. *Haller K.K., Ventikos Y., Poulikakos D.* Computational study of high-speed liquid droplet impact // J. Appl. Phys. – 2002. – V. 95, No 2. – P. 2821–2828.
20. *Terashima H., Tryggvason G.* A front-tracking/ghost-fluid method for fluid interfaces in compressible flows // J. Comput. Phys. – 2009. – V. 228, No 11. – P. 4012–4037.
21. *Harlow F., Amsden A.* Fluid dynamics: a LASL monograph. – Springfield, Virginia: Nat. Techn. Inform. Serv., 1971. – 115 p.
22. *Abgrall R., Karni S.* Computations of compressible multifluids // J. Comput. Phys. – 2001. – V. 169, No 2. – P. 594–623.
23. *Hirt C.W., Nichols B.D.* Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // J. Comput. Phys. – 1981. – V. 39, No 1. – P. 201–225.
24. *Wemmenhove R., Veldman A.E.P., Luppens R., Bunnik T.* Application of a VOF method to model compressible two-phase flow in sloshing tanks // Proc. of OMAE2008. – 2008. – P. 603–612. – Paper № OMAE2008-57254.

25. *Петров Н.В.* Исследование локального энерговыделения в воде вблизи свободной поверхности // Науч.-техн. ведом. СПбГПУ. – 2012. – № 1. – С. 92–96.
26. *Rider W.J., Kothe D.* Reconstructing volume tracking // J. Comput. Phys. – 1998. – V. 141, No 2. – P. 112–152.
27. *Renardy Y., Renardy M.* PROST: a parabolic reconstruction of surface tension for the volume-of-fluid method // J. Comput. Phys. – 2002. – V. 183, No 2. – P. 400–421.
28. *Ubbink O., Issa R.I.* A method for capturing sharp fluid interfaces on arbitrary meshes // J. Comput. Phys. – 1999. – V. 153, No 1. – P. 26–50.
29. *Cassidy D.A., Edwards J.R., Tian M.* An investigation of interface-sharpening schemes for multi-phase mixture flows // J. Comput. Phys. – 2009. – V. 228, No 16. – P. 5628–5649.
30. *Osher S., Sethian J.* Front propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations // J. Comput. Phys. – 1988. – V. 78, No 2. – P. 12–49.
31. *Sethian J.A., Smereka P.* Level Set Methods for fluid interfaces // Annu. Rev. Fluid Mech. – 2003. – V. 35. – P. 341–372.
32. *Karni S.* Multicomponent flow calculation by a consistent primitive algorithm // J. Comput. Phys. – 1994. – V. 112, No 1. – P. 31–43.
33. *Гапоненко Ю.А.* Численное моделирование газовой кумуляции продуктов взрыва при детонации плоских параллельных зарядов // Вычисл. технологии. – 2000. – Т. 5, № 4. – С. 31–39.
34. *Abgrall R.* How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations: A quasi-conservative approach // J. Comput. Phys. – 1996. – V. 125, No 1. – P. 150–160.
35. *Anderson D.M., McFadden G.B., Wheeler A.A.* Diffuse-interface methods in fluid mechanics // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1998. – V. 30. – P. 139–165.
36. *Lowengrub J., Truskinovsky L.* Quasi-incompressible Cahn–Hilliard fluids and topological transitions // Proc. Roy. Soc. Lond. A. – 1998. – V. 454. – P. 2617–2654.
37. *Larrouturou B.* How to preserve the mass fraction positivity when computing compressible multi-component flows // J. Comput. Phys. – 1990. – V. 95, No 1. – P. 59–84.
38. *Shyue K.M.* An efficient shock-capturing algorithm for compressible multicomponent problems // J. Comput. Phys. – 1998. – V. 142, No 1. – P. 208–242.
39. *Abgrall R., Saurel R.* Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures // J. Comput. Phys. – 2003. – V. 186, No 2. – P. 361–396.
40. *Osterman A., Dular M., Sirok B.* Numerical simulation of a near-wall bubble collapse in an ultrasonic field // J. Fluid Sci. Techn. – 2009. – V. 4, No 1 – P. 210–221.
41. *Shyue K.M.* An anti-diffusion based Eulerian interface-sharpening algorithm for compressible two-phase flow with cavitation // Proc. 8th Int. Symposium on Cavitation. – Singapore, 2012. – Abstr. No 198. – URL: [http://www.math.ntu.edu.tw/~shyue/mypapers/kmshyue\\_cav2012.pdf](http://www.math.ntu.edu.tw/~shyue/mypapers/kmshyue_cav2012.pdf), свободный.
42. *Ballil A., Jolgam S., Nowakowski A.F., Nicoleau F.C.G.A.* Numerical simulation of compressible two-phase flows using an Eulerian type reduced model // Proc. World Congress on Engineering, WCE 2012. – London, 2012. – P. 1835–1840.
43. *Yabe T., Xiao F., Utsumi T.* The constrained interpolation profile method for multiphase analysis // J. Comput. Phys. – 2001. – V. 169, No 2. – P. 556–593.
44. *Doihara R., Takahashi K.* Numerical calculation of laser-produced bubble near a solid boundary until the second collapse // JSME. Int. J. Ser. B. – 2001. – V. 44, No 2. – P. 238–246.

45. *Kawasaki K.* Numerical model of 2-D multiphase flow with solid-liquid-gas interaction // Int. J. Offshore Polar Eng. – 2005. – V. 15, No 3. – P. 198–203.
46. *Kokh S., Allaire G.* Numerical simulation of 2D two-phase flows with interface // Godunov Methods: Theory and Applications. – 2001. – P. 513–518.
47. *Xiao F., Honma Y., Kono T.* A simple algebraic interface capturing scheme using hyperbolic tangent function // Int. J. Numer. Methods Fluids. – 2005. – V. 48, No 9. – P. 1023–1040.
48. *Sun Y., Beckermann C.* Sharp interface tracking using the phase-field equation // J. Comput. Phys. – 2007. – V. 220, No 2. – P. 626–653.
49. *Yabe T., Wang P.Y.* Unified numerical procedure for compressible and incompressible fluid // J. Phys. Soc. Japan. – 1991. – V. 60, No 7. – P. 2105–2108.
50. *Fedkiw R., Liu X.-D., Osher S.* A general technique for eliminating spurious oscillations in conservative schemes for multiphase and multispecies Euler equations // Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Sim. – 2002. – V. 3, No 2. – P. 99–106.
51. *Karni S.* Hybrid multifluid algorithms // SIAM J. Sci. Comput. – 1996. – V. 17, No 5. – P. 1019–1039.
52. *Glimm J., Li X.L., Liu Y.-J., Xu Z.-L., Zhao N.* Conservative front tracking with improved accuracy // SIAM J. Num. Analysis. – 2003. – V. 41, No 5. – P. 1926–1947.
53. *Fedkiw R., Aslam T., Merriman B., Osher S.* A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the Ghost Fluid Method) // J. Comput. Phys. – 1999. – V. 152, No 2. – P. 457–492.
54. *Fedkiw R.* Coupling an Eulerian fluid calculation to a Lagrangian solid calculation with the ghost fluid method // J. Comput. Phys. – 2002. – V. 175, No 1. – P. 200–224.
55. *Nourgaliev R.R., Dinh T.N., Theofanous T.G.* Direct numerical simulation of compressible multiphase flows: interaction of shock waves with dispersed multimaterial media // Proc. 5th Int. Conf. Multiphase Flow, ICMF'04. – Yokohama, Japan, 2004. – Paper No 494. – URL: <http://www.crss.ucsb.edu/music/LEVEL0/ConferencesOpen/Conferences.2004/DNS-ICMF04.pdf>, свободный
56. *Takahira H., Yuasa S.* Numerical simulations of shock-bubble interactions using an improved Ghost Fluid Method // ASME 2005 Fluids Engineering Division Summer Meeting (FEDSM2005). – 2005. – No FEDSM 2005-77119. – P. 777–785.
57. *Nourgaliev R., Kadioglu S., Mousseau V.* Fully-implicit interface tracking for all-speed multifluid flows // Computational Fluid Dynamics 2008. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2009. – P. 551–557.
58. *Ogata Y., Yabe T.* Shock capturing with improved numerical viscosity in primitive Euler representation // Comput. Phys. Commun. – 1999. – V. 119, No 2–3. – P. 179–193.
59. *Peng G., Ishizuka M., Hayama S.* An improved CIP-CUP method for submerged water jet flow simulation // JSME Int. J. Ser. B. – 2001. – V. 44, No 4. – P. 497–504.
60. *Ida M.* An improved numerical solver for the unified solution of compressible and incompressible fluids involving free surfaces. II. Multi-Time-Step integration and applications // Comput. Phys. Commun. – 2003. – V. 150, No 3. – P. 300–322.
61. *Nomura S., Nishida K.* Numerical simulation of a single bubble rising in an ultrasonic standing wave field // Jpn. J. Appl. Phys. – 2003. – V. 42. – P. 2975–2980.
62. *Tong M., Browne D.J.* Modelling compressible gas flow near the nozzle of a gas atomiser using a new unified model // Computers and Fluids. – 2009. – V. 38, No 6. – P. 1183–1190.



63. *Tanaka N., Maseguchi R., Ogawara T.* Improvement of conservative property and interface resolution of mesh-based two-phase flow simulation algorithms for splashing fluid behavior // *Nuc. Eng. Design.* – 2010. – V. 240, No 12. – P. 3984–3990.
64. *Lee S.-J., Cho B.-G., Lee I.* Two-dimensional unsteady aerodynamics analysis based on a multiphase perspective // *Comput. Fluids.* – 2012. – V. 53. – P. 105–116.
65. *Xiao F.* A class of single-cell high-order semi-Lagrangian advection schemes // *Month. Weath. Rev.* – 2000. – V. 128, No 4. – P. 1165–1176.
66. *Harlow F.H., Welch J.E.* Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow with free surface // *Phys. Fluids.* – 1965. – V. 8. – P. 2182–2189.
67. *Amsden A.A., Harlow F.H.* A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculations // *J. Comput. Phys.* – 1970. – V. 6, No 2. – P. 322–325.
68. *Patankar S.V., Spalding D.B.* A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows // *J. Heat Mass Transfer.* – 1972. – V. 15. – P. 1787–1806.
69. *Harlow F.H., Amsden A.A.* Numerical simulation of almost incompressible flow // *J. Comput. Phys.* – 1968. – V. 3, No 1. – P. 80–93.
70. *Issa R.I.* Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting // *J. Comput. Phys.* – 1986. – V. 62, No 1. – P. 40–65.
71. *Yoon S.Y., Yabe T.* The unified simulation for incompressible and compressible flow by the predictor-corrector scheme based on the CIP method // *Comput. Phys. Commun.* – 1999. – V. 119, No 2–3. – P. 149–158.
72. *Yabe T., Ishikawa T., Wang P.Y., Aoki T., Kadota Y., Ikeda F.* A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation. II. Two- and three-dimensional solvers // *Comput. Phys. Commun.* – 1991. – V. 66, No 2–3. – P. 233–242.
73. *Zalesak S.T.* Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids // *J. Comput. Phys.* – 1979. – V. 31, No 3. – P. 335–362.
74. *Yabe T., Xiao F.* Description of complex and sharp interface with fixed grids in incompressible and compressible fluid // *Comput. Math. Appl.* – 1995. – V. 29, No 1. – P. 15–25.
75. *Blake J.R., Gibson D.C.* Cavitation bubbles near boundaries // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 1987. – V. 19. – P. 99–123.
76. *Аганин А.А., Халитова Т.Ф., Хисматуллина Н.А.* Метод численного решения задач сильного сжатия несферического кавитационного пузырька // *Вычисл. технологии.* – 2010. – Т. 15, № 1. – С. 14–32.
77. *Аганин А.А., Ильгамов М.А., Халитова Т.Ф.* Ударное воздействие струи на жесткую стенку // *Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН.* – Казань: Фолиант, 2011. – Т. 1. – С. 134–146.
78. *Benjamin T.B., Ellis A.T.* The collapse of cavitation bubbles and the pressures thereby produced against solid boundaries // *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* – 1966. – V. 260, No 1110. – P. 221–240.
79. *Crum L.A.* Surface oscillations and jet development in pulsating bubbles // *J. de Physique.* – 1979. – V. 40, No 8. – P. C8-285–C8-288.
80. *Ohl C.-D., Kurz T., Geisler R., Lindau O., Lauterborn W.* Bubble dynamics, shock waves and sonoluminescence // *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* – 1999. – V. 357, No 1751. – P. 269–294.
81. *Philipp A., Lauterborn W.* Cavitation erosion by single laser-produced bubbles // *J. Fluid Mech.* – 1998. – V. 361. – P. 75–116.

82. *Аганин А.А., Ильгамов М.А., Малахов В.Г., Халитова Т.Ф., Хисматуллина Н.А.*  
Ударное воздействие кавитационного пузырька на упругое тело // Учен. зап. Казан.  
ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2011. – Т. 153, кн. 1. – С. 131–146.

Поступила в редакцию  
26.09.12

---

**Аганин Александр Алексеевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Института механики и машиностроения КазНЦ РАН.

E-mail: *aginin@kfti.knc.ru*

**Гусева Татьяна Сергеевна** – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института механики и машиностроения КазНЦ РАН.

E-mail: *guseva@kfti.knc.ru*